Flujo del Campo Eléctrico a través de una superficie

El flujo eléctrico es una magnitud escalar que mide el número de líneas de campo que atraviesan una superficie.

$$\boxed{\Phi = \int \vec{E} \cdot d\vec{S}}$$

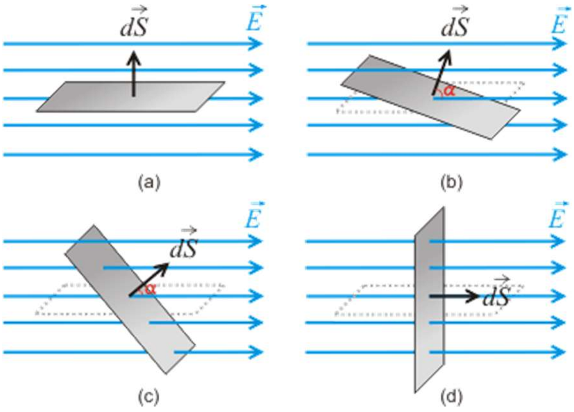
$$\Phi = E \cdot S \cdot cos\alpha$$

"Φ" es el flujo eléctrico

"E" es la intensidad del campo eléctrico

"S" es la superficie atravesada por las líneas de campo

"α" es ángulo que forman los vectores intensidad de campo eléctrico y superficie



Teorema de Gauss para el Campo Eléctrico

El flujo del campo eléctrico a través de cualquier superficie cerrada es igual a la carga, Q, contenida dentro de la superficie divida por la constante ε_0.

$$\Phi = \int \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int K \cdot \frac{Q}{r^2} \cdot \vec{u} \cdot d\vec{S}$$

$$\Phi = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

$$\begin{cases} \Phi = \int \vec{E} \cdot d\vec{S} \\ \Phi = \dfrac{Q}{\varepsilon_0} \end{cases}$$

$$\boxed{\int \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\varepsilon_0}}$$

Campo Eléctrico y Potencial Eléctrico creado por una distribución esférica uniforme de carga

Supongamos una esfera maciza, de radio R, uniformemente cargada. Se define la densidad de carga como

$$\rho = \frac{Q}{V}$$

"Q" es la carga total de la esfera

"V" es el volumen de la esfera ($V = \frac{4}{3}\pi \cdot R^3$)

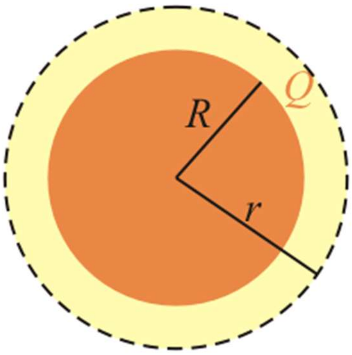
[1] Intensidad del Campo Eléctrico y Potencial Eléctrico en un punto exterior

$$\Phi = \int \vec{E} \cdot d\vec{S} = E \cdot S \cdot cos\alpha = E \cdot 4\pi \cdot r^2$$

$$\int \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

$$E \cdot 4\pi \cdot r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

$$\boxed{E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q}{r^2}}$$



Para puntos exteriores, la esfera uniformemente cargada, se comporta como una carga puntual, Q, situada en el centro de la esfera.

Por analogía con las cargas puntuales, el potencial en un punto exterior tomará el valor

$$\boxed{V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q}{r}}$$

En la superficie de la esfera, la Intensidad del Campo Eléctrico y el Potencial Eléctrico tomarán los valores

$$\boxed{E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q}{R^2}} \qquad \boxed{V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q}{R}}$$

[2] Intensidad del Campo Eléctrico y Potencial Eléctrico en un punto interior

$$\Phi = \int \vec{E} \cdot d\vec{S} = E \cdot S \cdot cos\alpha = E \cdot 4\pi \cdot r^2$$

$$\int \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q'}{\varepsilon_0}$$

$$E \cdot 4\pi \cdot r^2 = \frac{Q'}{\varepsilon_0}$$

Teniendo en cuenta que

$$\rho = \frac{Q'}{V}$$

$$Q' = \rho \cdot V = \rho \cdot \frac{4}{3}\pi \cdot r^3$$

[La carga contenida por la superficie considerada, Q´, es solo una parte de la carga total de la esfera, Q]

Queda

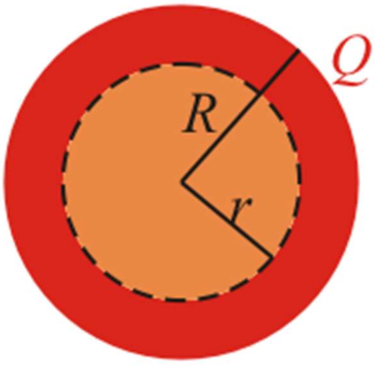
$$E \cdot 4\pi \cdot r^2 = \frac{Q'}{\varepsilon_0} = \frac{\rho \cdot \frac{4}{3}\pi \cdot r^3}{\varepsilon_0}$$

Despejando

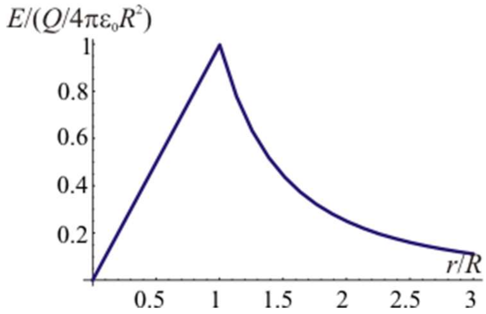
$$\boxed{E = \frac{1}{3} \cdot \frac{\rho}{\varepsilon_0} \cdot r}$$

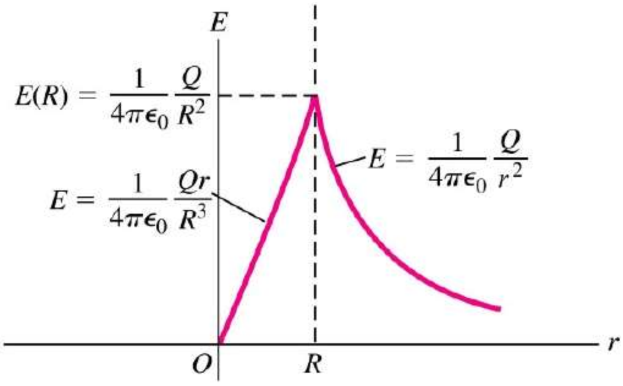
El potencial eléctrico en un punto interior de la esfera quedaría

$$V = -\frac{1}{6} \cdot \frac{\rho}{\varepsilon_0} \cdot r^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{\rho}{\varepsilon_0} \cdot R^2$$

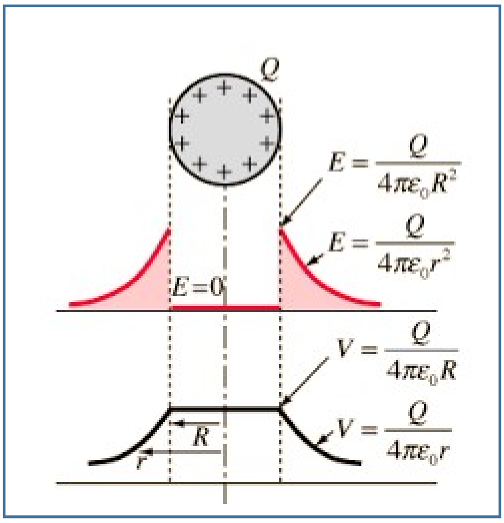


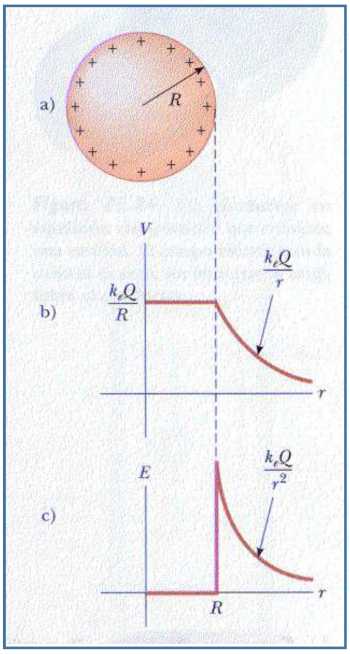
Variación de la intensidad del campo eléctrico en el interior, en la superficie y en el exterior de una esfera uniformemente cargada





Esfera hueca conductora





Para una esfera hueca conductora, la carga está uniformemente distribuida en la superficie y la carga en el interior es nula.

Intensidad de campo en el exterior

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{Q}{r^2}$$

Intensidad de campo en la superficie

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{Q}{R^2}$$

Intensidad de campo en el interior

$$E = 0$$

La intensidad del campo eléctrico en el interior de una esfera hueca conductora es nula, de modo que el potencial eléctrico en el interior permanece constante y con el mismo valor que en la superficie de la esfera.

Potencial eléctrico en el exterior

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{Q}{r}$$

Potencial eléctrico en la superficie

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{Q}{R}$$

Potencial eléctrico en el interior

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{Q}{R}$$

Ejercicios

1| Una esfera metálica conductora, de radio R, está cargada con una carga, Q, distribuida uniformemente por su superficie. Determina la intensidad del campo eléctrico:

a) En un punto interior de la esfera.
b) En un punto de la superficie de la esfera.
c) En un punto exterior, situado a una distancia 3R del centro de la esfera.

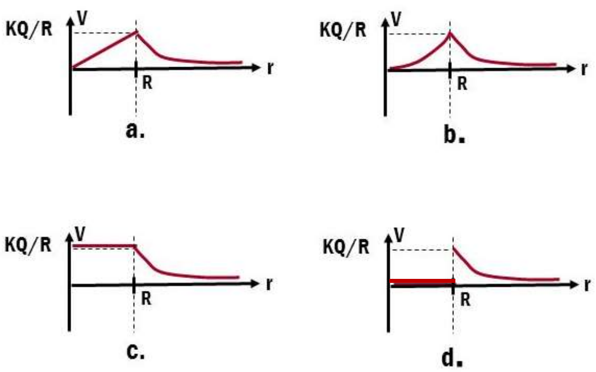
Solución: $[E = 0]$ $\left[E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q}{R^2}\right]$ $\left[E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q}{9R^2}\right]$

2| Una esfera metálica maciza, de radio R, está uniformemente cargada, con una carga Q. Considerando que la densidad cúbica de carga vale $\rho = 1\,\frac{C}{m^3}$, determina la intensidad del campo eléctrico:

a) En un punto interior, situado a una distancia $\frac{R}{2}$ del centro de la esfera.
b) En un punto de la superficie de la esfera.
c) En un punto exterior, situado a una distancia 2R del centro de la esfera.

Solución: $\left[E = \frac{1}{6\varepsilon_0} \cdot R\right]$ $\left[E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q}{R^2}\right]$ $\left[E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q}{4R^2}\right]$

3| ¿Cuál de las siguientes gráficas representa la variación del valor del potencial eléctrico debido a una esfera conductora en función de la distancia al centro de la esfera?



Solución: La gráfica c. El potencial permanece constante en el interior de la esfera y disminuye a medida que nos alejamos de su centro.

4| La siguiente gráfica muestra el valor de la intensidad del campo gravitatorio terrestre en función de la distancia al centro de la Tierra. La gráfica de la intensidad del campo eléctrico debido a una esfera maciza cargada, ¿Tendrá la misma forma?