

$\langle \phi_n | \phi_n \rangle = \langle \phi_n | \int dx |x\rangle \langle x| \phi_n \rangle \Rightarrow \left(\frac{\sqrt{2\ell}}{\ell} n + \frac{1}{2} \right) \frac{\ell}{2} = \frac{\pi}{2} (2\ell - 1), \ell = 1, 2, \dots \Rightarrow K_0 = -\frac{\pi}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
 $\langle \phi_n | \phi_n \rangle = \int dx \phi_n^*(x) \phi_n(x) \Rightarrow \psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\ell}} \cos \left[\frac{\pi}{\ell} (2n-1)x \right]; \psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\ell}} \sin \left[\frac{\pi}{\ell} nx \right]$
 $\langle \phi_n | \phi_n \rangle = \frac{1}{\ell} \int dx e^{-ikx} e^{ikx} \stackrel{!}{=} 0; \hbar \neq 0$
 $\hat{H} \psi_n(x) = -\frac{\hbar^2}{2m} \partial_x^2 \psi_n(x) = \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\pi}{\ell} (2n-1) \right)^2 \psi_n(x)$
 $E_{ns} = \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\pi^2}{\ell^2} (2n-1)^2, n=1, 2, \dots; \hat{H} \psi_n(x) = \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{2\pi n}{\ell} \right)^2 \psi_n(x)$
 $\hat{H} \psi_a = -\frac{\hbar^2}{2m} \partial_x^2 \psi_a(x) = \frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{2a^2} \psi_a(x) - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{4a^4} (x-x_0)^2 \psi_a(x)$
 $\hat{H} \rightarrow \hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \partial_x^2 + V(x); \hat{H} \psi_a = \frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{2a^2} \psi_a = E_{0a} \psi_a$
 $V(x) = \frac{1}{2} m \omega^2 (x-x_0)^2 \rightarrow m \omega^2 = \frac{\hbar^2}{m^2 a^4} \Rightarrow \omega = \frac{\hbar}{2ma^2}$
 $E_{0a} = \frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{2a^2}$
 $[\hat{p}, \hat{x}] = \frac{\hbar}{i}; \hat{p} = \frac{\hbar}{i} \partial_x; \hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 \hat{x}^2$
 $1. \hat{a} + \hat{b} = (a+ib)(a-ib); a, b \in \mathbb{R}; 2. (a\hat{p} + ib\hat{x})(a\hat{p} - ib\hat{x}), a, b \in \mathbb{R}$
 $= a^2 \hat{p}^2 + iba \hat{p} \hat{x} - iba \hat{p} \hat{x} + b^2 \hat{x}^2 = a^2 \hat{p}^2 + b^2 \hat{x}^2 - ba \hbar$
 $\hat{H} = (a\hat{p} + ib\hat{x})(a\hat{p} - ib\hat{x}) = ba \hbar; a^2 = \frac{1}{2m}; b^2 = \frac{1}{2} m \omega^2$
 $D\psi = C^+ \frac{1}{\sqrt{\hbar \omega}} (a\hat{p} + ib\hat{x}); C^- = \frac{1}{\sqrt{\hbar \omega}} (a\hat{p} - ib\hat{x}) \Rightarrow \hat{H} = \hbar \omega C^+ C^- + \frac{1}{2} \hbar \omega$
 $(\hat{H} - \frac{1}{2} \hbar \omega) |n\rangle = \hbar \omega C^- |n\rangle \Rightarrow C^- |n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n}} |n-1\rangle$

Física Cuántica

Introducción	02
La emisión de radiación térmica del cuerpo negro	03
El efecto fotoeléctrico	09
Los espectros atómicos	17
La dualidad onda-corpúsculo de De Broglie	22
El principio de incertidumbre de Heisenberg	25
La ecuación de onda de Schrödinger	32
El concepto de probabilidad cuántica de Born	35

Introducción

A finales del siglo XIX se había conseguido hacer de la física una herramienta eficaz, capaz de explicar casi todos los fenómenos conocidos. Para ello contaba con un conjunto de magníficas teorías como la de las interacciones entre partículas de Newton, la del campo electromagnético de Maxwell, la termodinámica y la mecánica estadística. Un conjunto de leyes que permitían no sólo dar cuenta de los fenómenos ya observados, sino también realizar predicciones, comprobables mediante la observación y la experimentación.

El universo parecía permitir su explicación recurriendo esencialmente a dos conceptos básicos: el concepto de corpúsculo o partícula, requerido para la comprensión de los fenómenos en los que intervienen cuerpos materiales que se desplazan, y el concepto de onda, asociado a fenómenos en los que se transmite energía a través de oscilaciones.

Todo este conjunto de teorías y de conceptos básicos forman la denominada **Física Clásica**, que se edifica sobre dos principios fundamentales:

- El **Principio de Determinismo**, que indica la posibilidad de poder determinar un fenómeno físico de acuerdo con ciertas leyes.
- El **Principio de Causalidad**, que afirma que todo fenómeno físico responde a una causa concreta.

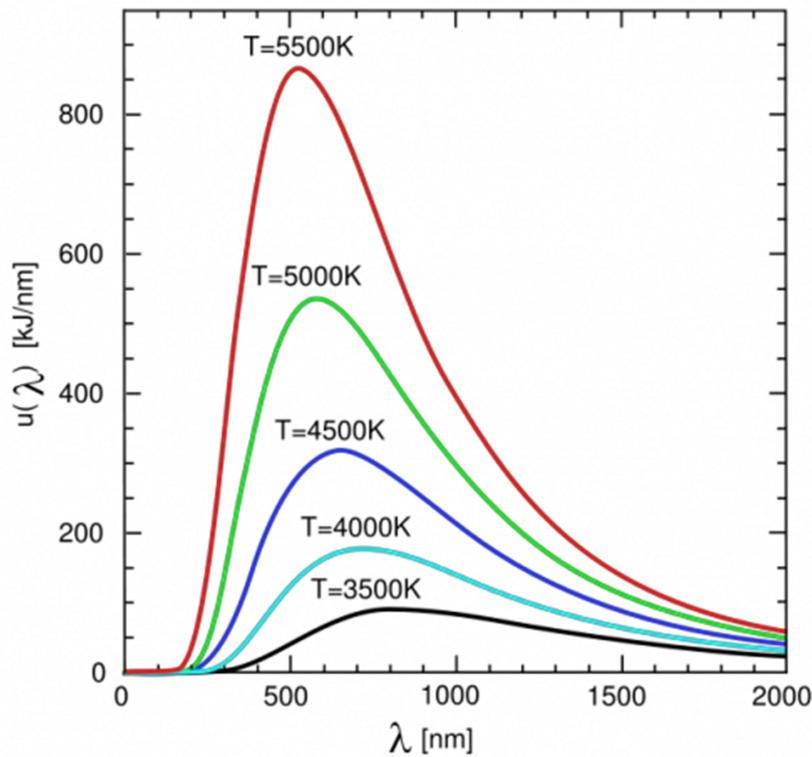
Sin embargo, en este intento de la Física Clásica por dominar los fenómenos del universo aparecen una serie de resultados experimentales para los que no se encuentra una explicación teórica satisfactoria: la emisión de radiación térmica por el cuerpo negro, el efecto fotoeléctrico y los espectros atómicos.

La Emisión de Radiación Térmica del Cuerpo Negro

En física, un cuerpo negro es un objeto capaz de absorber todas las radiaciones que llegan hasta él, sin reflejar ninguna de ellas. El cuerpo negro tiene la capacidad de emitir radiación térmica cuando es calentado.

Se denomina **distribución espectral de radiación térmica** a la expresión matemática que relaciona la energía emitida, por unidad de tiempo y por unidad de superficie, a una temperatura dada, con la longitud de onda de dicha radiación.

Al estudiar la distribución espectral de la radiación térmica emitida por un cuerpo negro se obtuvieron gráficas como la siguiente:



De las gráficas obtenidas pueden extraerse las siguientes conclusiones:

- La cantidad total de energía emitida aumenta con la temperatura.
- La radiación de intensidad máxima se desplaza hacia longitudes de onda cada vez más pequeñas al aumentar la temperatura.

Las explicaciones teóricas de estos dos hechos están en la Ley de Stefan-Boltzmann y en la Ley del Desplazamiento de Wien.

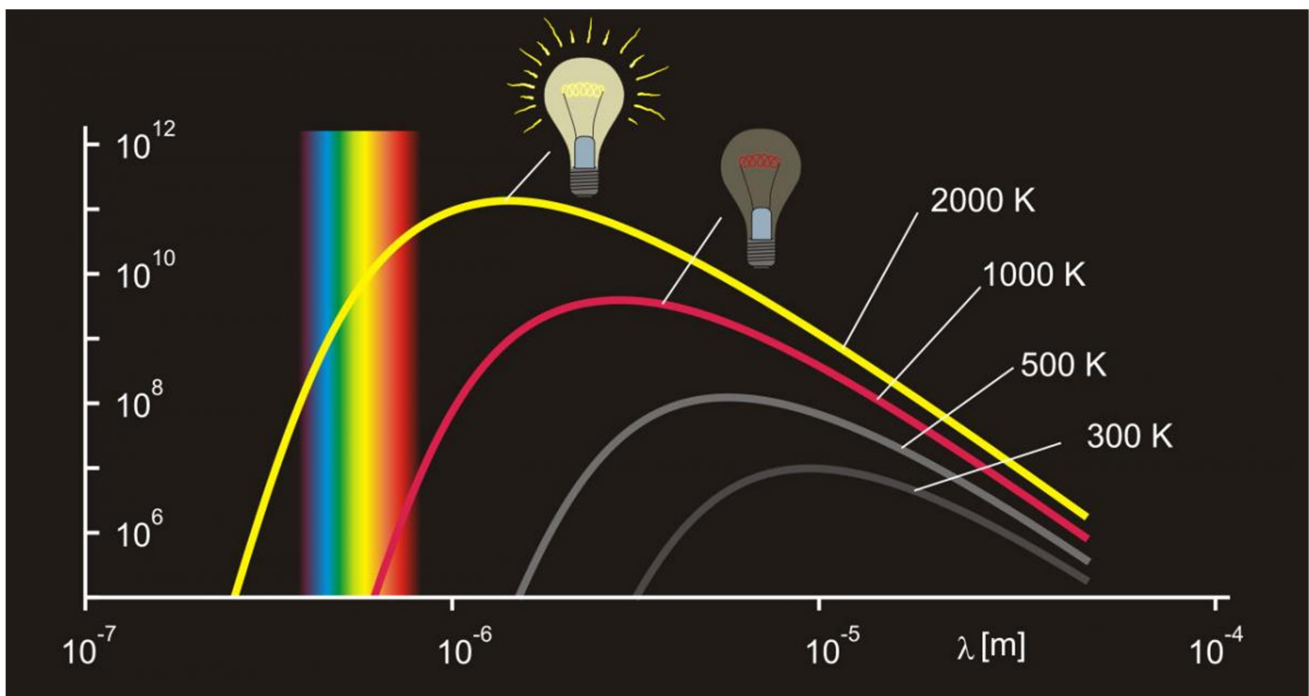
El enunciado de la **Ley de Stefan-Boltzmann** es el siguiente: La energía total emitida, por unidad de tiempo y por unidad de superficie, por el cuerpo negro es proporcional a la cuarta potencia de la temperatura absoluta:

$$U = \sigma \cdot T^4$$

Donde $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}^4$ es la constante de Stefan-Boltzmann.

El enunciado de la **Ley del Desplazamiento de Wien** es el siguiente: la longitud de onda de la radiación para la cual la energía es máxima es inversamente proporcional a la temperatura absoluta:

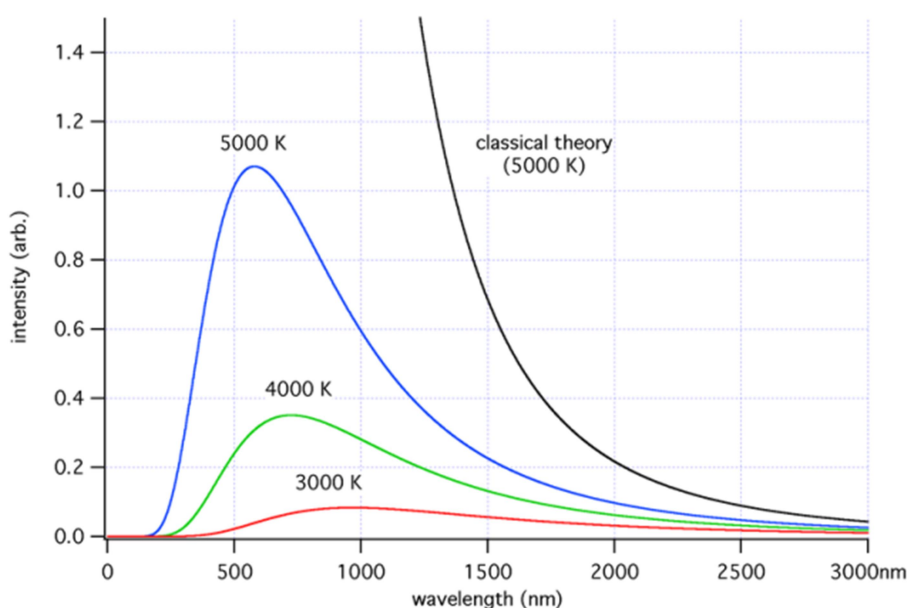
$$\lambda_{\text{máxima}} = \frac{2,989 \cdot 10^{-3}}{T}$$



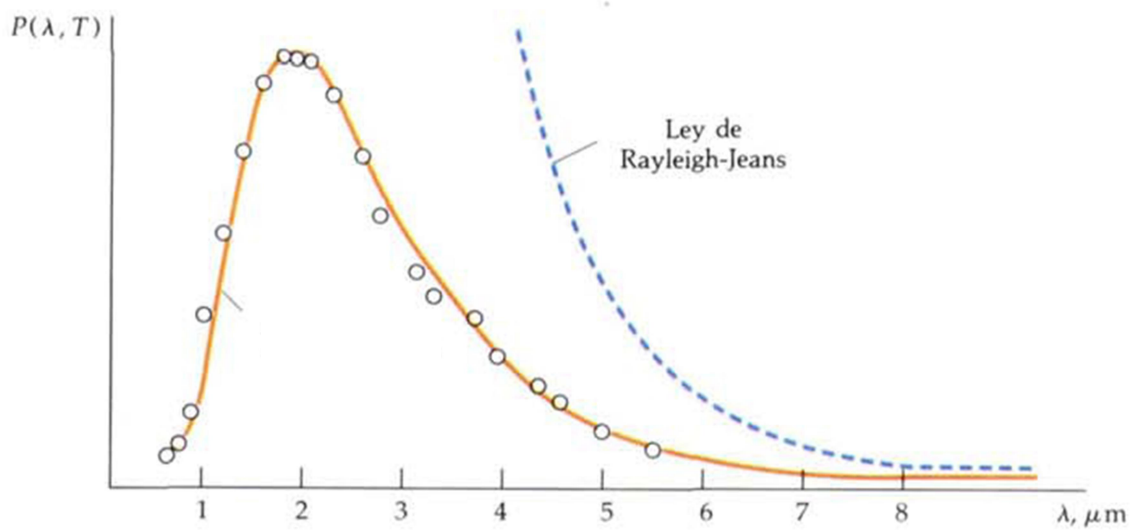
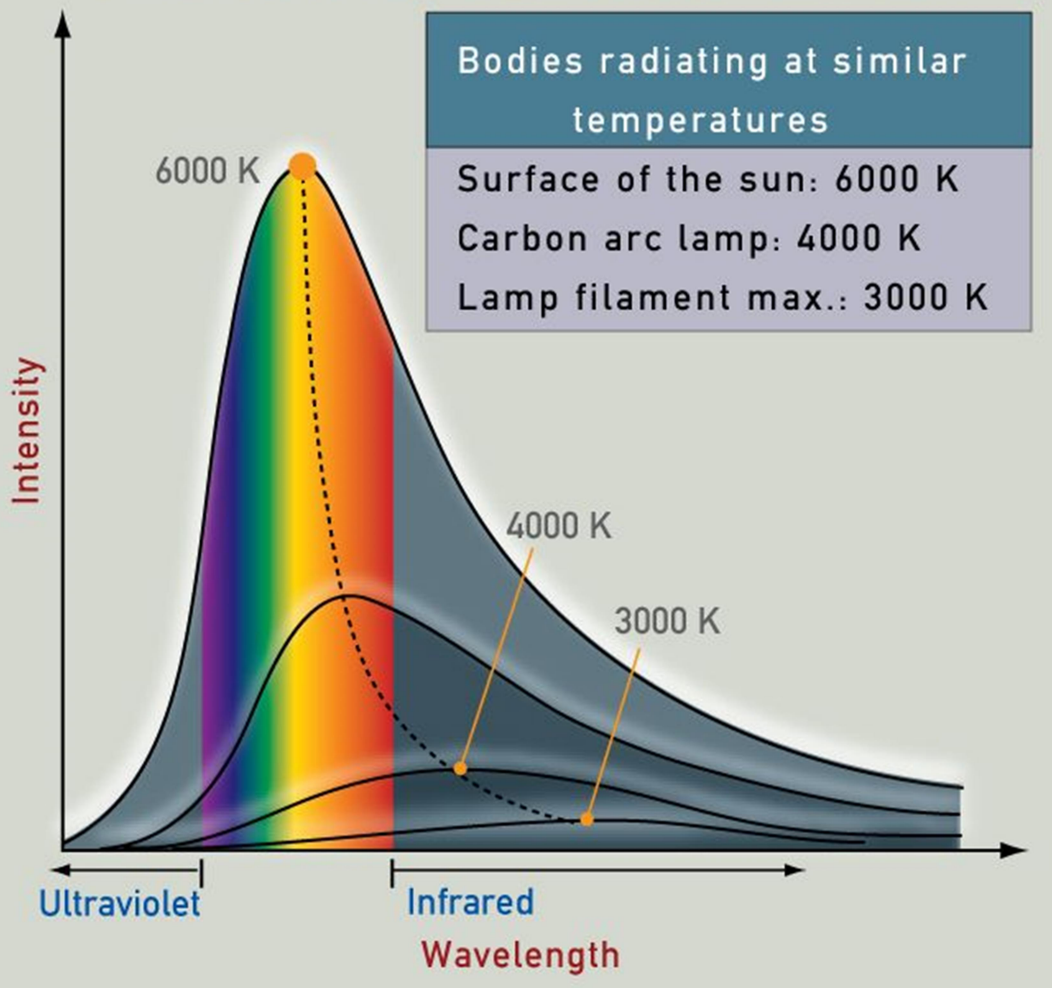
Para explicar el mecanismo de emisión de energía por parte del cuerpo negro, se admitió que en el estudio de la interacción luz-materia hay que aceptar la idea de que la materia está formada por partículas con carga eléctrica con las que pueden interaccionar los campos electromagnéticos de las ondas electromagnéticas, produciendo oscilaciones en dichas partículas. (Este modelo de la materia formada por partículas con carga eléctrica que actúan como osciladores se propuso antes de que se generalizase el modelo atómico de Thomson, en el que aparecían los electrones).

Rayleigh aplica a la radiación del cuerpo negro la idea de que la distribución de energía, a una temperatura dada, respecto de la longitud de onda, es consecuencia de los distintos estados de vibración de las partículas microscópicas con carga eléctrica (comportándose como osciladores) que forman parte del cuerpo negro. Dado que el espectro de energía radiada obtenido es continuo, establece que la energía de cada uno de los osciladores puede tomar cualquier valor. Con estas ideas, deduce una expresión matemática para la energía radiada por el cuerpo negro en función de la longitud de onda.

La función de Rayleigh, para longitudes de onda grandes, se ajusta bastante bien a los valores experimentales. Sin embargo, en su fórmula, la energía radiada depende de la frecuencia de una forma que la hace crecer sin límite y, para longitudes de onda pequeñas (altas frecuencias), conduce a resultados absurdos, hecho que se conoce como "catástrofe ultravioleta".



Blackbody Radiation Curves



En 1.900, Max PLANCK propone una fórmula que logra, por fin, ajustarse a los valores experimentales en todo el rango de frecuencias.

Planck explicó que la única forma de conseguir esta fórmula fue recurrir al "artificio de cálculo" de subdividir la energía en pequeños elementos, a los que denominó "cuantos", cuyo valor viene dado por la expresión:

$$E = h \cdot f$$

Donde $h=6,624 \cdot 10^{-34}$ J·s es la denominada constante de Planck.

Supone, de esta forma, que la energía no puede ser intercambiada de forma continua, sino en pequeños "paquetes de energía" cuyo valor viene dado por la fórmula anterior.

La energía de cada uno de los osciladores que forman el cuerpo negro es un múltiplo entero de esta cantidad:

$$E = n \cdot h \cdot f$$

Todo esto equivale a decir que las ondas electromagnéticas están cuantizadas, lo que constituyó el gran cambio conceptual introducido por Planck.

La idea de Planck se puede extender a cualquier tipo de oscilador, como por ejemplo un péndulo. Sin embargo, en el péndulo, la naturaleza cuántica de la energía no se puede apreciar debido al pequeño valor de la frecuencia. Por lo que, en este caso, los cuantos en los que se divide la energía son tan pequeños que no se pueden distinguir de un continuo de energía. En general, sólo en los sistemas en los que los valores de la energía son del orden del valor de la frecuencia de la radiación electromagnética se está en condiciones de aplicar y de apreciar la hipótesis de Planck sobre la cuantización de la energía, tanto para los procesos de emisión, como para los procesos de absorción.

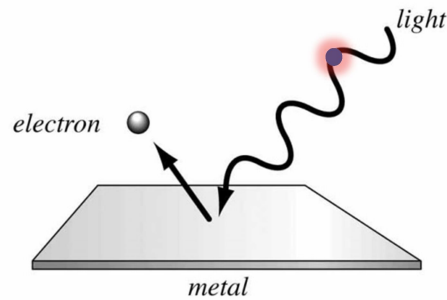


La hipótesis de Planck encontró en el mundo científico y filosófico de la época una violenta oposición, ya que implicaba la emisión de luz (radiación electromagnética) en forma de paquetes o cuantos de energía, hecho que chocaba con la idea de continuidad de los fenómenos físicos y, sobre todo, porque esta nueva idea que vuelve a considerar a la luz y, en general, a cualquier radiación electromagnética, como conjunto de corpúsculos, llegaba en un momento en el que la teoría ondulatoria de la radiación electromagnética se consideraba suficientemente probada.

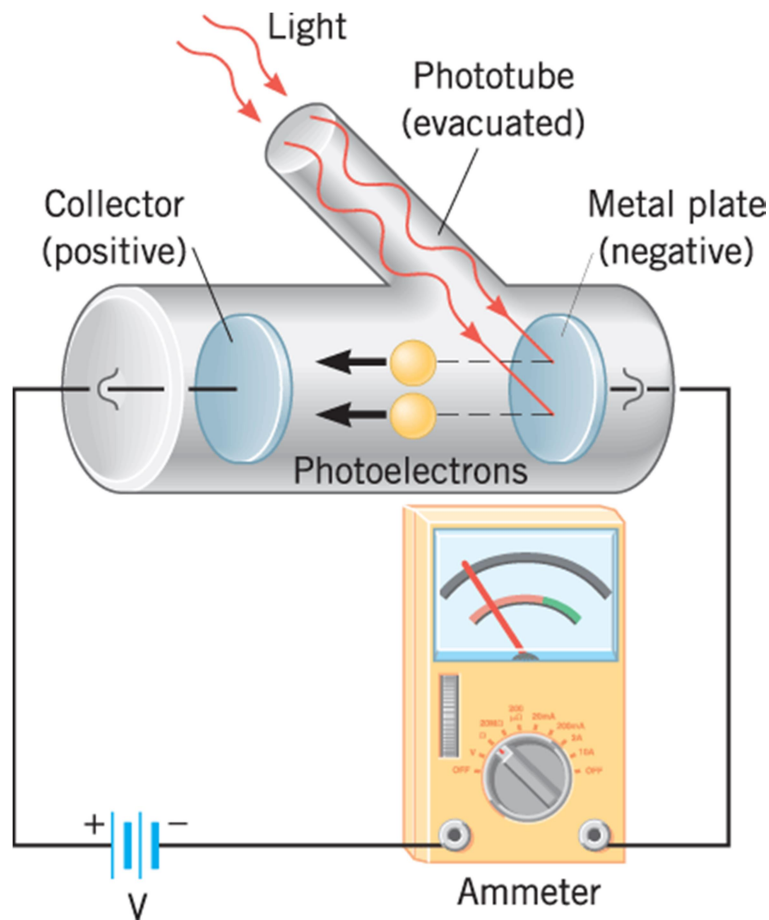
Científicos de la época, como Albert EINSTEIN, asumieron rápidamente la necesidad de elaborar una física que incorporara la discontinuidad de forma fundamental, una física en la que la energía de los osciladores considerados por Planck estuviera cuantizada no sólo al ser intercambiada, sino en sí misma. Es decir, la energía de un oscilador sólo podría tomar valores $E=n \cdot h \cdot f$. Esta hipótesis suponía una ruptura radical con la física clásica y constituyó el primer paso del camino hacia la discontinuidad: la cuantización de algunas de las principales magnitudes físicas, que dejarían de ser continuas para convertirse en discretas.

El Efecto Fotoeléctrico

El efecto fotoeléctrico hace referencia al fenómeno por el que una lámina metálica emite electrones cuando es iluminada, es decir, cuando sobre ella incide radiación electromagnética.

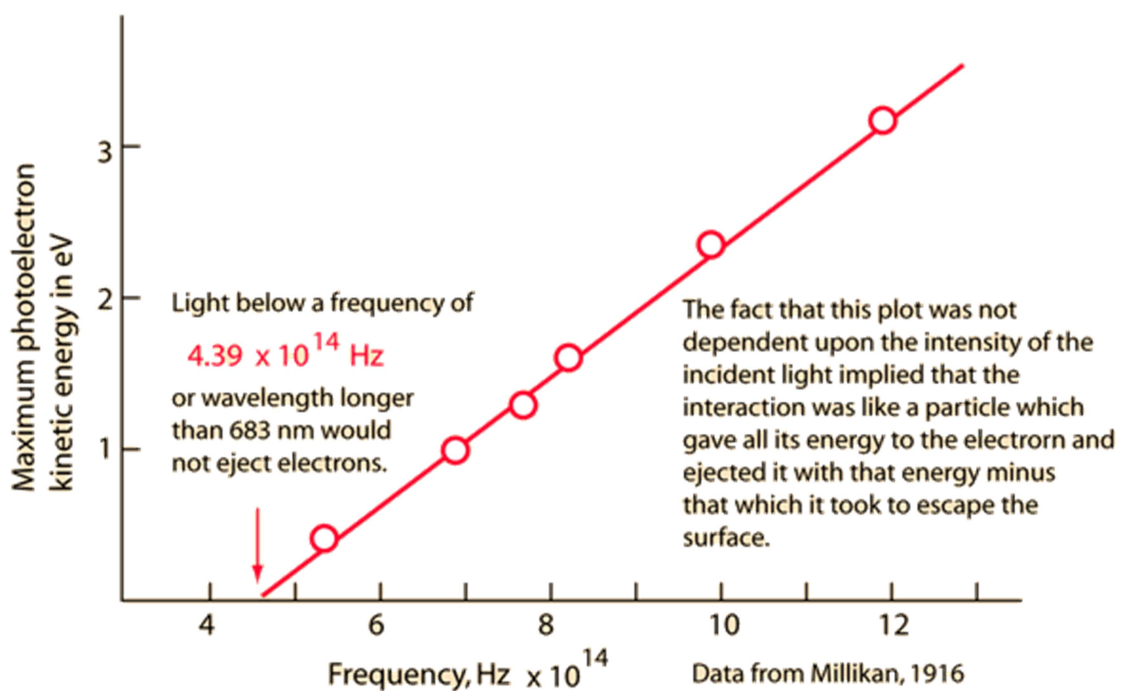


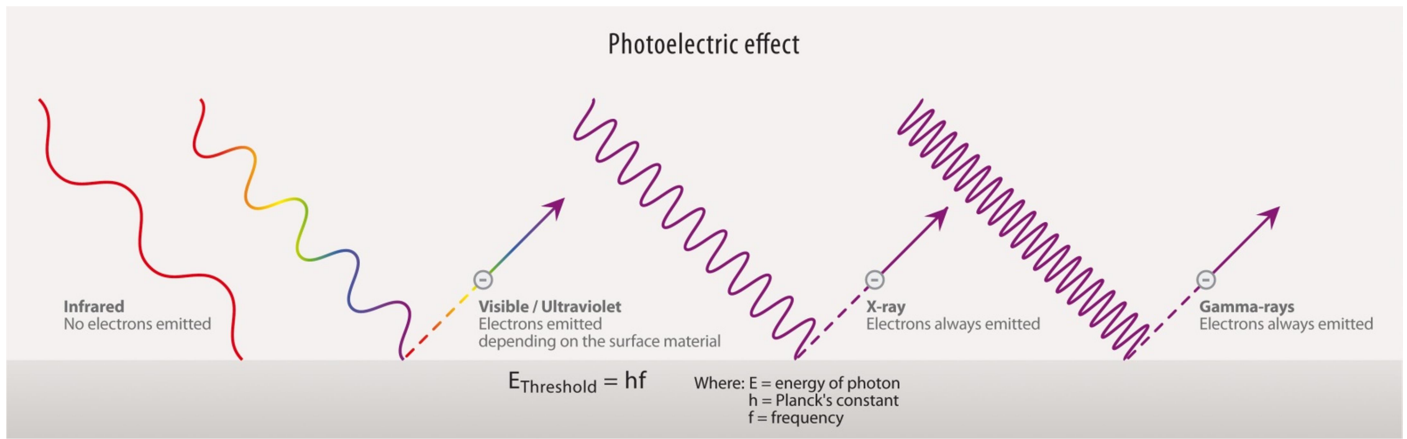
Los electrones liberados pueden dar lugar a una corriente eléctrica si se construye un dispositivo adecuado con un cátodo (electrodo negativo) metálico del que se extraen los electrones y un ánodo (electrodo positivo) hacia el que se dirigen los mismos.



Del estudio del efecto fotoeléctrico se desprenden los siguientes hechos:

- No se observa, dentro del error experimental, retraso alguno entre el momento en el que incide la radiación electromagnética sobre la placa metálica y el instante en el que son emitidos los electrones, es decir, el efecto fotoeléctrico es instantáneo.
- Para cada metal existe una frecuencia, denominada frecuencia umbral, f_0 , por debajo de la cual no se produce la emisión de electrones, sea cual sea la intensidad de la radiación incidente.
- Cualquier radiación incidente cuya frecuencia sea superior a la frecuencia umbral provoca la emisión de electrones, independientemente de su intensidad.
- La energía cinética de los electrones emitidos no es función de la intensidad de la radiación electromagnética incidente y sí es función de la frecuencia de dicha radiación.

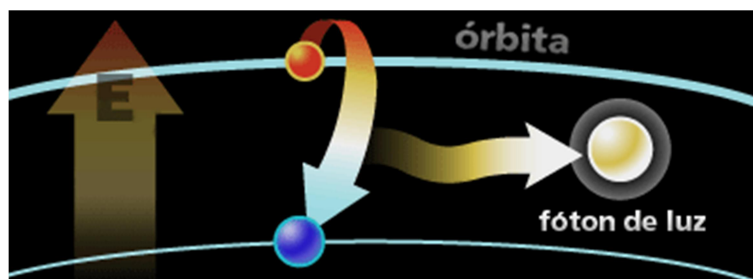


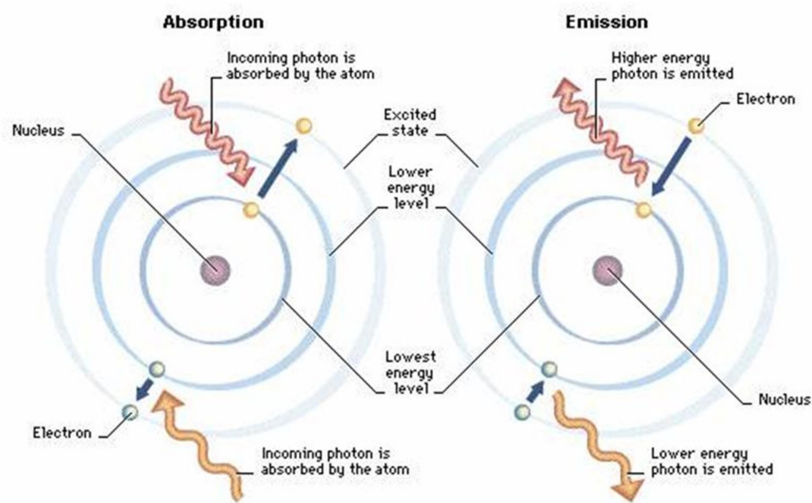
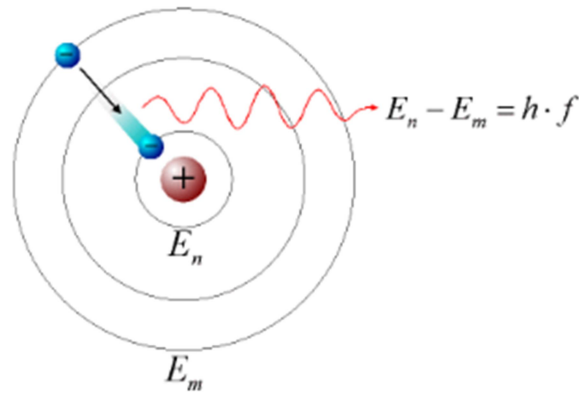


La Física Clásica se mostró incapaz de explicar, de forma teórica, el efecto fotoeléctrico y los hechos experimentales derivados, fundamentalmente porque concluía que la energía cinética de los electrones emitidos debía ser función de la intensidad de la radiación electromagnética que incidía en el metal, algo que estaba demostrado que no sucedía.

En 1.905, Albert EINSTEIN propuso que en el efecto fotoeléctrico la radiación electromagnética, en su interacción con los electrones de la placa metálica, se comporta de la forma propuesta por Planck para los osciladores atómicos relacionados con la radiación emitida por el cuerpo negro. Es decir, la energía de la radiación electromagnética no es uniforme, sino que está cuantizada.

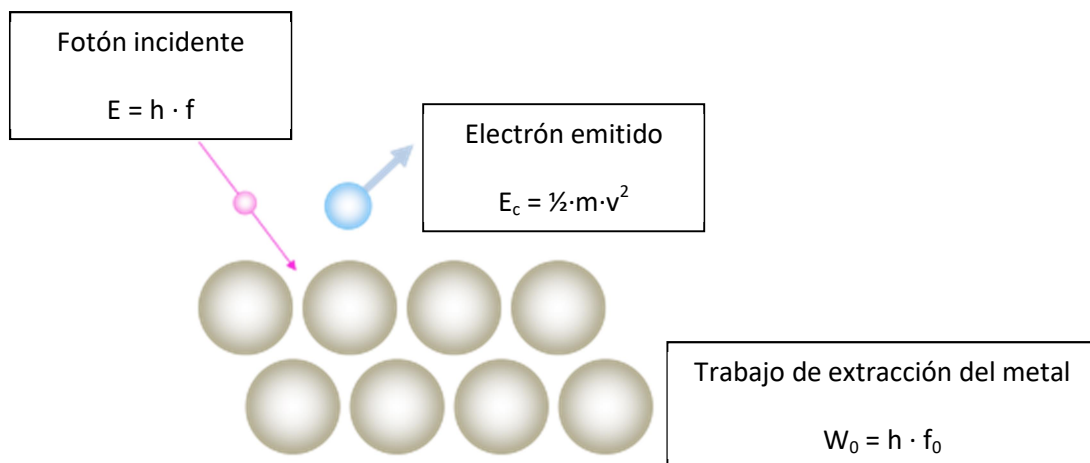
Einstein afirmó que el requisito impuesto por Planck de que el contenido energético de una onda electromagnética, de frecuencia f , sólo puede tener los valores $h \cdot f$, $2h \cdot f$, $3h \cdot f$, ..., implica que en la fuente luminosa, que irradia la placa metálica, cuando se pasa del estado de energía $n \cdot h \cdot f$ al estado de energía $(n-1) \cdot h \cdot f$, se emite un cuanto de radiación electromagnética, al que llamó **fotón**, cuyo contenido energético es $E = h \cdot f$.





La intensidad de la radiación electromagnética incidente depende del número de fotones que transporta, mientras que la energía de cada uno de esos fotones depende de la frecuencia.

La intensidad de la corriente eléctrica generada depende del número de electrones puestos en movimiento.



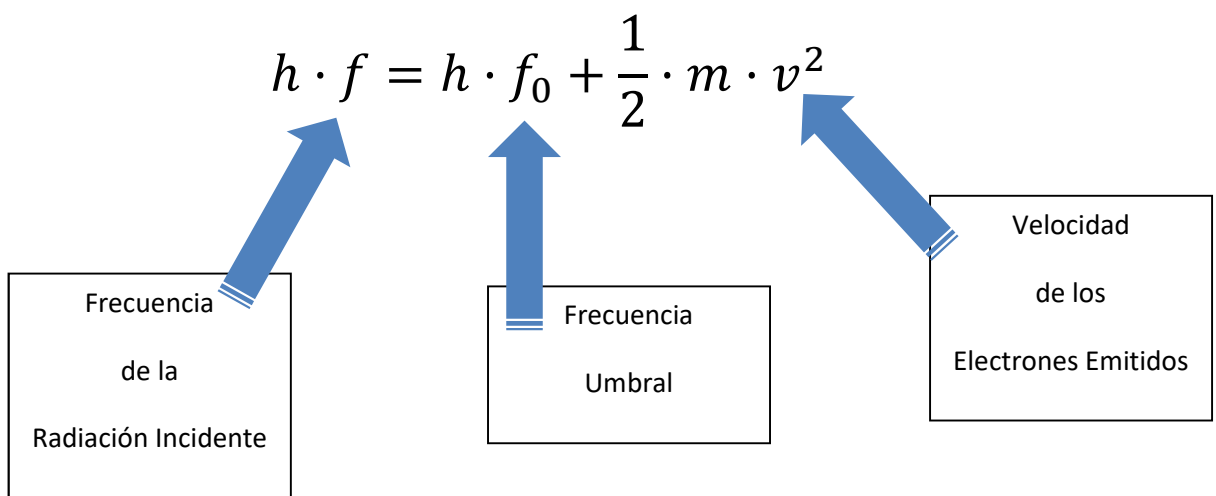
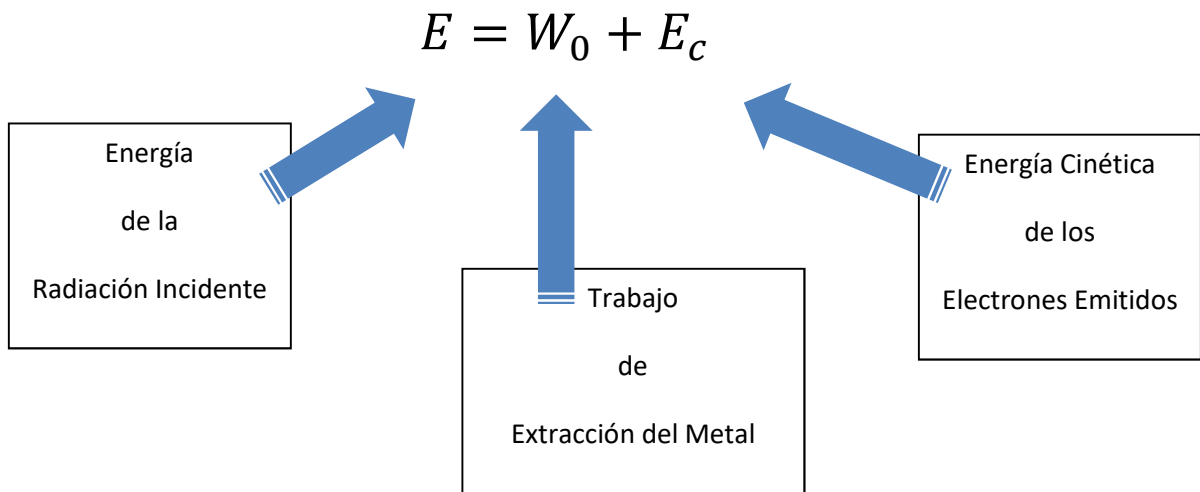
La explicación que hace Einstein del efecto fotoeléctrico es la siguiente: Cuando un fotón, de energía $E=h \cdot f$, incide sobre la placa metálica, parte de su energía se invierte en arrancar al electrón. Esta energía es conocida con el nombre de trabajo de extracción, $W_0=h \cdot f_0$.

Si la energía del fotón incidente no alcanza, como mínimo, el valor del trabajo de extracción, no se emitirán electrones*. La frecuencia que aparece en la expresión del trabajo de extracción, f_0 , es la frecuencia umbral, es decir, el valor mínimo que debe tener la frecuencia de la radiación electromagnética incidente para que se produzca emisión de electrones. El trabajo de extracción es característico de cada metal y de las propiedades de su superficie.

Si la energía del fotón incidente supera el valor del trabajo de extracción, después de emitir los electrones, el exceso de energía se transfiere a los electrones en forma de energía cinética. Cuanto mayor sea la diferencia de energía entre la radiación incidente y el trabajo de extracción, mayor será la velocidad que adquieren los electrones emitidos.

Por tanto, al aumentar la intensidad de la radiación incidente, aumenta el número de electrones emitidos (siempre que se cumplan los condicionantes energéticos antes expuestos), mientras que al aumentar la frecuencia de la radiación incidente, aumenta la energía cinética de los electrones emitidos.

*No se emitirán electrones aunque se aumente la intensidad. Al aumentar la intensidad, aumenta el número de fotones emitidos, pero no aumenta la energía de éstos.



$$E = W_0 + E_c$$

$$h \cdot f = h \cdot f_0 + \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$$

Efecto Fotoeléctrico