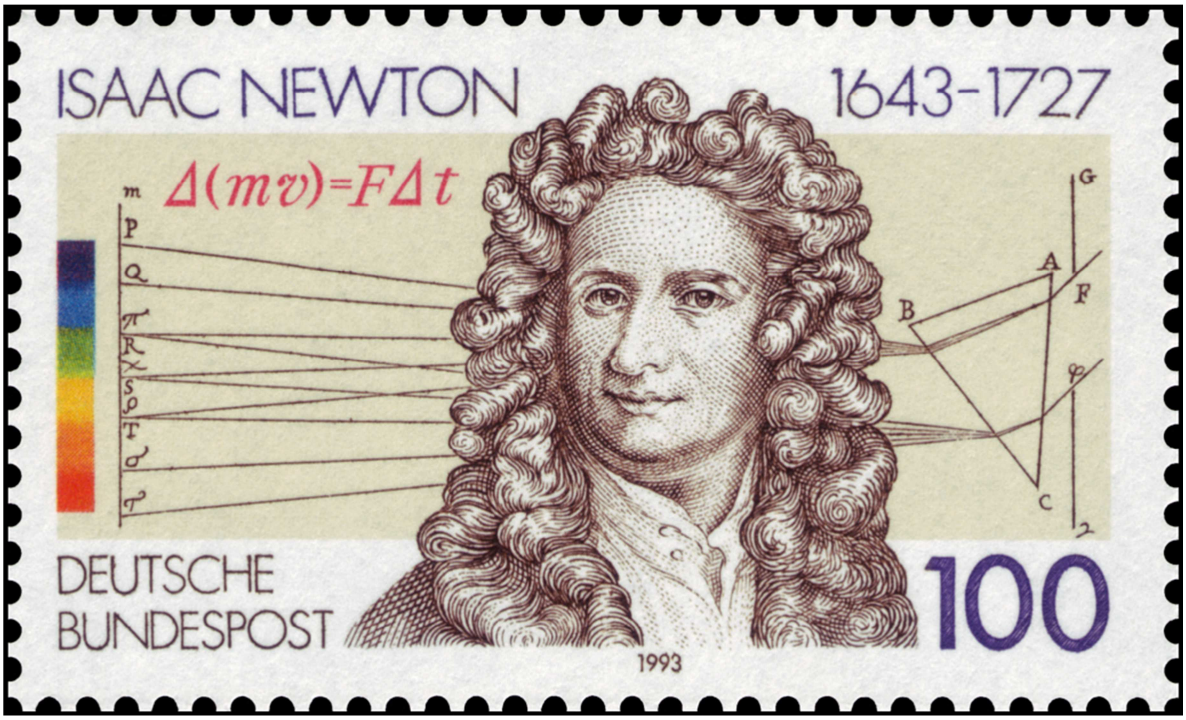
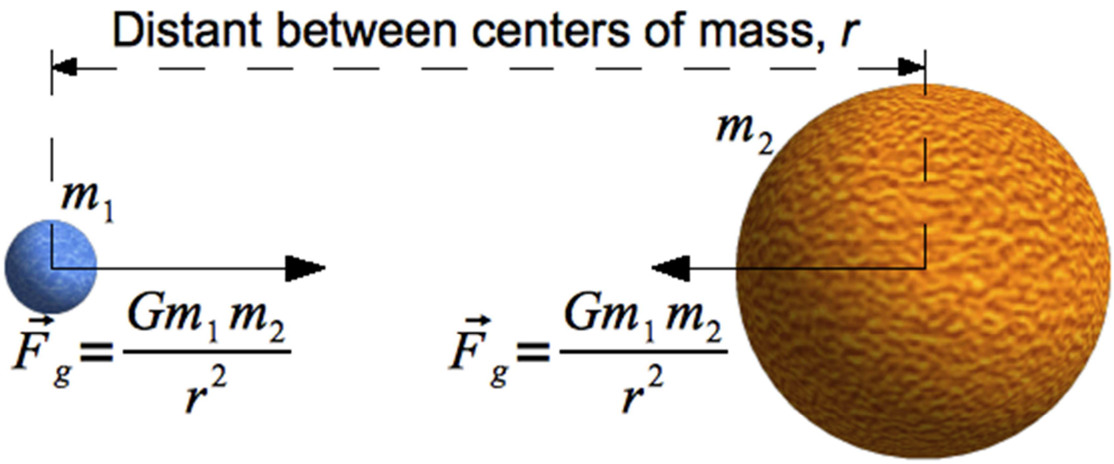


Ley de Gravitación Universal

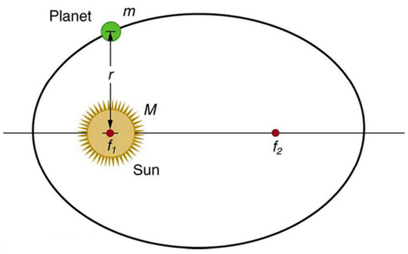


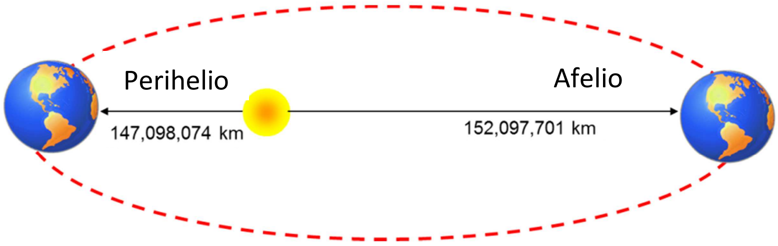
El Movimiento de los Planetas. Leyes de Kepler

Johannes Kepler

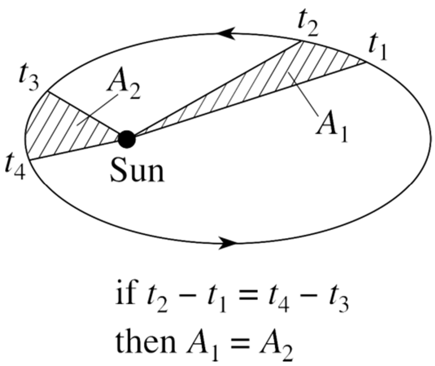
27 de Diciembre de 1571 · 15 de Noviembre de 1630

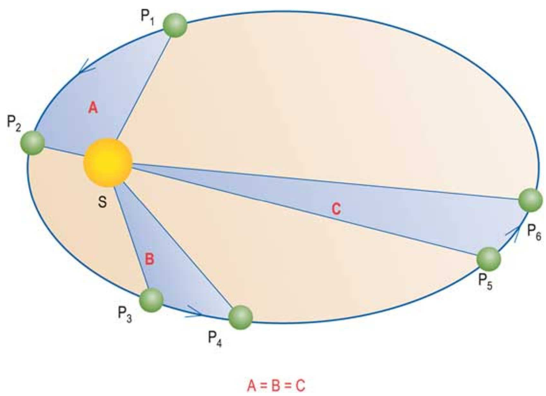
<u>Primera Ley de Kepler</u> | Los planetas se mueven en órbitas elípticas alrededor del Sol, que se encuentra situado en uno de los focos de la elipse.





<u>Segunda Ley de Kepler</u> | La recta que une a un planeta con el Sol barre áreas iguales en tiempos iguales.

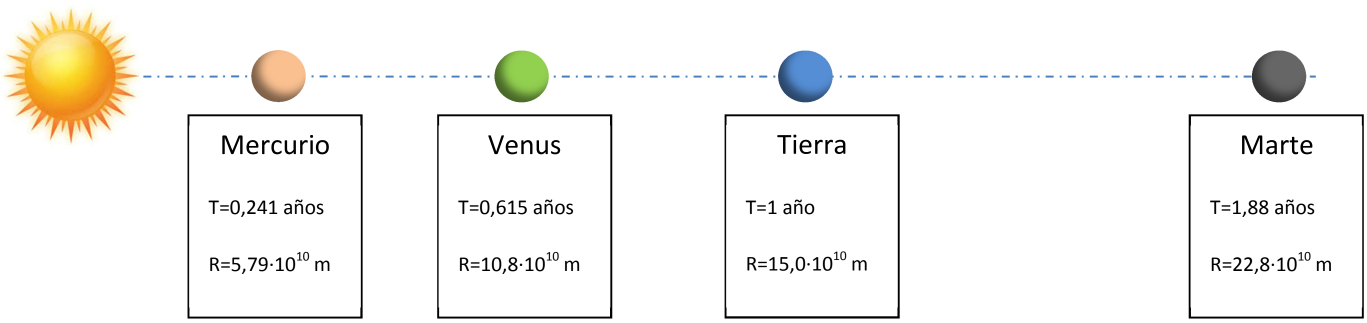




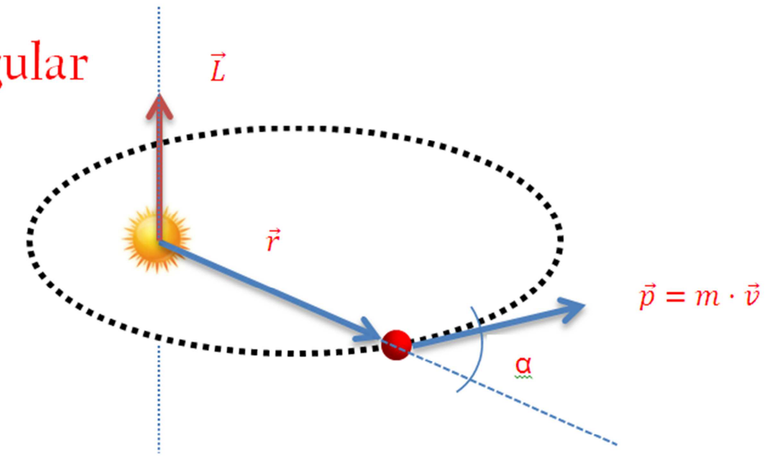
Esta ley implica que la velocidad con la que se mueven los planetas en las proximidades del perihelio es mayor que la velocidad con la que se mueven en las proximidades del afelio.

<u>Tercera Ley de Kepler</u> | La relación entre el cuadrado del período orbital y el cubo de la distancia media al Sol es constante e igual para todos los planetas.

$$\frac{T_1^2}{R_1^3} = \frac{T_2^2}{R_2^3} = constante$$



El Momento Angular



$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m \cdot \vec{v}$$

$$L = m \cdot r \cdot v \cdot sen\alpha$$

El Momento Angular en Órbitas Circulares

En una órbita circular, los vectores $\vec{r}$ y $\vec{p}$ son perpendiculares en cualquier punto de la trayectoria y, por tanto, $sen\alpha = 1$

$$L = m \cdot R \cdot v$$

Teniendo en cuenta la relación entre la velocidad lineal y la velocidad angular ($v = \omega \cdot r$):

$$\boxed{L = m \cdot R^2 \cdot \omega}$$

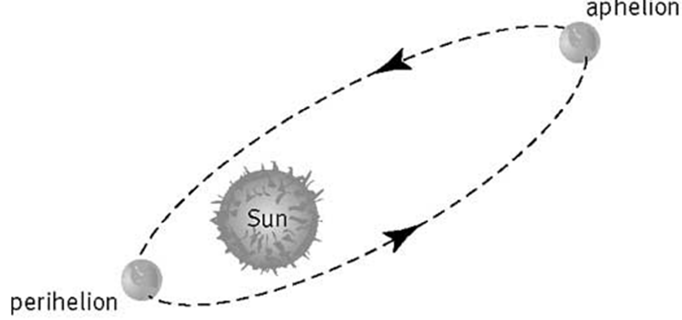
El Momento Angular en Órbitas Elípticas

El momento angular de un cuerpo que describe una trayectoria elíptica es:

$$\boxed{L = m \cdot r^2 \cdot \omega}$$

A diferencia de un cuerpo que describe una trayectoria circular, para el que R y ω son constantes, para un cuerpo que describe una trayectoria elíptica, los valores de r y ω dependen del punto de la trayectoria en el que se encuentre.

	Distancia al Sol	Velocidad	Momento Angular
Perihelio	147.056.800 km	30,75 km/s	$2{,}66 \cdot 10^{40}$ kg·m^2/s
Afelio	152.143.200 km	28,76 km/s	$2{,}66 \cdot 10^{40}$ kg·m^2/s



Conservación del Momento Angular

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d(\vec{r} \times \vec{p})}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F}$$

Para que el momento angular se conserve debe cumplirse que:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = 0$$

Lo que implica que:

$$\vec{r} \times \vec{F} = 0$$

Teniendo en cuenta que:

$$|\vec{r} \times \vec{F}| = r \cdot F \cdot sen\alpha$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \quad si \begin{cases} F = 0 \; [cuerpos\ con\ MRU] \\ sen\alpha = 0 \; [\vec{r}\ y\ \vec{F}\ tienen\ la\ misma\ dirección{:}\ Fuerzas\ Centrales] \end{cases}$$

Los planetas, en su movimiento alrededor del Sol, están sometidos a fuerzas centrales y, por tanto, su momento angular se conserva.

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \quad \rightarrow \quad \Delta L = 0 \quad \rightarrow \quad L_{final} = L_{inicial}$$

$$\cancel{m} \cdot r_f^2 \cdot w_f = \cancel{m} \cdot r_i^2 \cdot w_i$$

$$r_f^2 \cdot w_f = r_i^2 \cdot w_i$$

$$\boxed{r_f \cdot v_f = r_i \cdot v_i}$$

$$\frac{v_f}{v_i} = \frac{r_i}{r_f}$$

La relación entre las velocidades de un planeta en dos puntos de su trayectoria es inversa a la relación de las distancias de dichos puntos al Sol [Segunda Ley de Kepler].

Ley de Gravitación Universal

Isaac Newton

4 de Enero de 1643 · 31 de Marzo de 1727

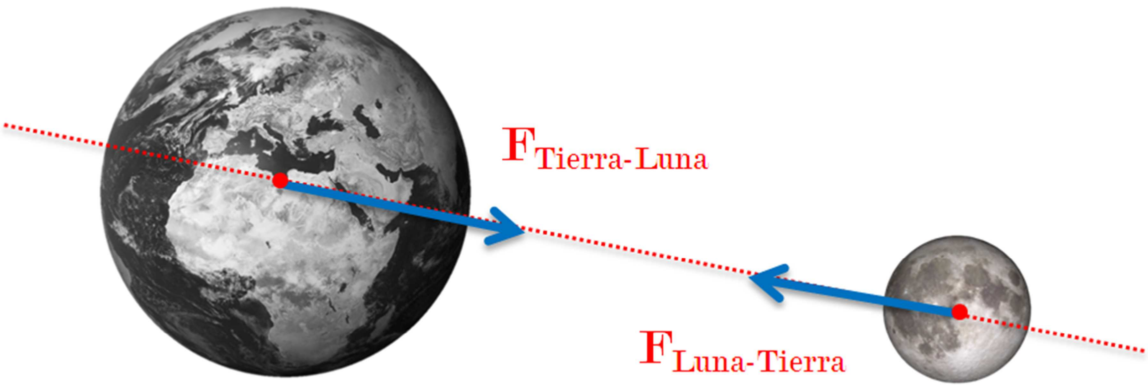
La fuerza gravitatoria entre dos cuerpos es siempre de atracción, directamente proporcional al producto de las masas de los cuerpos e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que los separa.

$$\boxed{F = G \cdot \frac{M \cdot m}{r^2}}$$

G es la llamada Constante de Gravitación Universal y su valor es:

$$G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ N \cdot m^2/kg^2$$

- En el caso de cuerpos esféricos, las fuerzas gravitatorias tienen la dirección de la línea que une los centros de las esferas.
- Para cuerpos esféricos, la distancia entre los cuerpos debe considerarse como la distancia entre los centros de las esferas.
- Las fuerzas gravitatorias entre dos cuerpos son iguales, tienen la misma dirección y sentidos opuestos.



$$F_{Tierra-Luna} = -F_{Luna-Tierra}$$

El Peso de los Cuerpos

Si situamos un cuerpo en las proximidades de un planeta, el peso del cuerpo, en ese punto, será el valor de la fuerza gravitatoria con la que el planeta atrae al cuerpo.

$$P = m \cdot g$$

El valor de la aceleración de la gravedad en la superficie de un planeta:

$$g = G \cdot \frac{M}{R^2}$$

M es la masa del planeta, expresada en kilogramos.

R es el radio del planeta, expresado en metros.

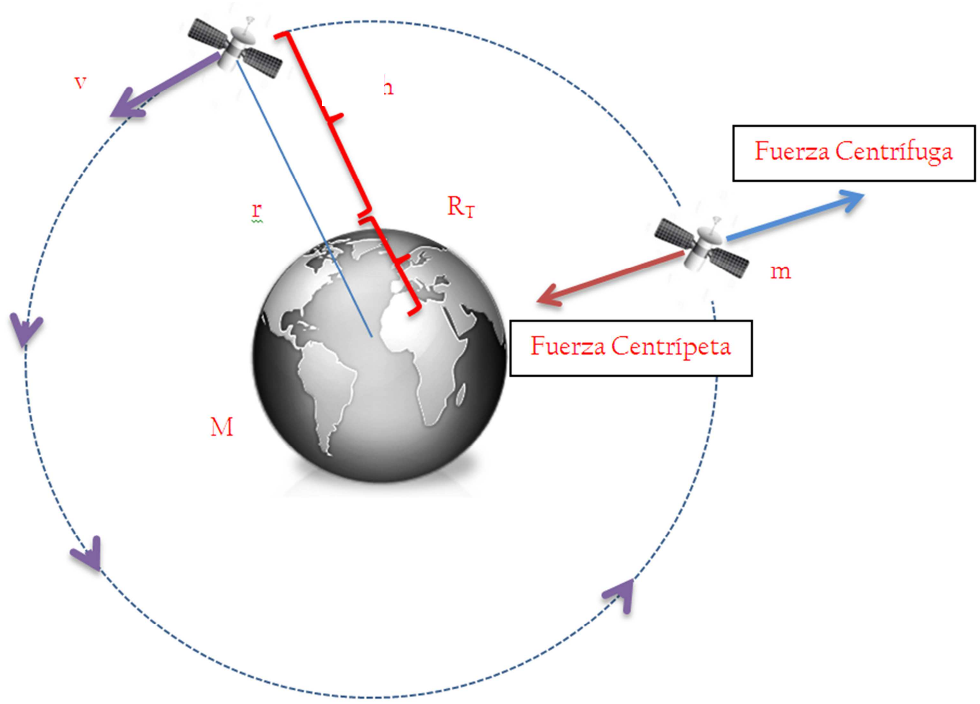
G es la Constante de Gravitación Universal.

El valor de la aceleración de la gravedad a una cierta altura, h, sobre la superficie de un planeta:

$$g_h = G \cdot \frac{M}{(R+h)^2}$$

- El peso de un cuerpo depende de su masa y del valor de la aceleración de la gravedad en el punto en el que se determina el peso.
- La aceleración con la que un cuerpo cae, la aceleración de la gravedad, no depende de la masa del cuerpo, sino de la masa del planeta en el que se encuentra el cuerpo. Cuerpos de masas diferentes, situados en el mismo punto, caerán con la misma aceleración.
- El valor de la aceleración de la gravedad disminuye al elevarnos sobre la superficie de un planeta.

El Movimiento de los Satélites Alrededor de la Tierra



$$F_{centrípeta} = F_{centrífuga}$$

$$F_{gravitatoria} = m \cdot \frac{v^2}{r}$$

$$G \cdot \frac{M \cdot m}{r^2} = m \cdot \frac{v^2}{r}$$

$$G \cdot \frac{M}{r} = v^2$$

$$\boxed{v = \sqrt{G \cdot \frac{M}{r}}}$$

$r = (R_T + h)$

$$\boxed{v = \sqrt{G \cdot \frac{M}{(R_T + h)}}}$$

$$g_h = G \cdot \frac{M}{(R_T + h)^2}$$

$$\boxed{v = \sqrt{g_h \cdot (R_T + h)}}$$

$$v = \sqrt{G \cdot \frac{M}{r}}$$

$$\omega \cdot r = \sqrt{G \cdot \frac{M}{r}}$$

$$\omega = \sqrt{G \cdot \frac{M \cdot r^2}{r}}$$

$$\boxed{\omega = \sqrt{G \cdot M \cdot r}}$$

Velocidad de rotación del satélite

$$\frac{2\pi}{T} = \sqrt{G \cdot M \cdot r}$$

$$\boxed{T = \sqrt{\frac{4\pi^2}{G \cdot M \cdot r}}}$$

Período orbital del satélite

Datos de los Planetas del Sistema Solar

	Mercurio	Venus	Tierra	Marte	Júpiter	Saturno	Urano	Neptuno	Luna
Radio [km]	2.439,64	6.051,59	6.378,15	3.397,00	71.492,68	60.267,14	25.557,25	24.766,36	1.737,1
Masa [kg]	$3,302\times10^{23}$	$4,8690\times10^{24}$	$5,9742\times10^{24}$	$6,4191\times10^{23}$	$1,8987\times10^{27}$	$5,6851\times10^{26}$	$8,6849\times10^{25}$	$1,0244\times10^{26}$	$7,3477\times10^{22}$
Distancia al Sol [km]	57.909.175	108.208.930	149.597.870	227.936.640	778.412.010	1.426.725.400	2.870.972.200	4.498.252.900	384.399 Distancia a la Tierra
Período [años]	0,2408467	0,61519726	1,0000174	1,8808476	11,862615	29,447498	84,016846	164,79132	27,32158 días Alrededor de la Tierra
Gravedad [m/s^2]	3,70	8,87	9,81	3,71	23,12	8,96	8,69	11,00	1,622
Temperatura [°C]	166,85	456,85	14,85	-87,15 / -5,15	-121,15	-139,15	-197,15	-220,15	-53
	☿	♀	⊕	♂	♃	♄	♅	♆	☾

PROBLEMAS PROPUESTOS

1| Calcular la fuerza con la que se atraen dos cuerpos, de 10 kg de masa cada uno, separados una distancia de 1 m.

Solución. $F=6{,}67\cdot 10^{-9}$ N

2| Calcular la fuerza con la que la Tierra, cuya masa es de $5{,}98\cdot 10^{24}$ kg, atrae a una manzana, de 200 g de masa, situada en su superficie. El radio de la Tierra es de 6.370 km.

Solución. $F=1{,}97$ N

3| Calcular la fuerza con la que la Tierra atrae a la Luna, sabiendo que la masa y el radio de la Luna son $7{,}35\cdot 10^{22}$ kg y 1.731,1 km, respectivamente.

Solución.

4| Dos masas iguales están separadas una distancia de 1 km. Determina el valor de las masas si la fuerza de atracción entre ellas es de $F=6{,}67$ N.

Solución. $m=3{,}16\cdot 10^{8}$ kg

5| ¿A qué distancia habrá que situar dos masas iguales, de 1.000 kg, para que la fuerza de atracción sea de $6{,}67\cdot 10^{-3}$ N.

Solución. $d=0{,}1$ m

6| Dos masas, M y m, están separadas una distancia, d. Si las masas se alejan hasta que la distancia entre ellas se duplique, 2d, la fuerza de atracción:

a) Se hace cuatro veces menor.
b) Se hace la mitad.
c) No varía.
d) Se hace el doble.
e) Se hace cuatro veces mayor.

Solución. La respuesta correcta es la a)

7| Calcular el valor de la aceleración de la gravedad en la superficie de la Tierra.

Solución. $g=9{,}83$ m/s^2

8| Para un cuerpo de 60 kg de masa, determinar el valor de su peso en la superficie de la Tierra y en la superficie de la Luna.

Solución. El peso en la Tierra es 588 N y en la Luna 96 N

9| ¿Cuál sería el valor de la aceleración de la gravedad en la superficie de la Tierra si el radio del planeta se redujera a la mitad?

Solución.

10| Manteniendo constante el radio, ¿Cuál debería ser la masa de la Tierra para que el valor de la aceleración de la gravedad se duplicara en su superficie?

Solución.

11| Un cuerpo se deja caer libremente, en la superficie de la Tierra, desde una altura de 40 m. Determina el tiempo que tardará en llegar al suelo. ¿Cuánto hubiera tardado si la experiencia se hubiese realizado en la superficie de la Luna?

Solución.

12| Si la masa de la Tierra se duplicara y su radio se hiciese la mitad, ¿Cuánto valdría la aceleración de la gravedad en la superficie del planeta?

Solución. $g=78{,}4\ m/s^2$

13| Calcular a qué altura sobre la superficie de la Tierra el valor de la aceleración de la gravedad ha disminuido un 10 %.

Solución. $h=3{,}54\cdot10^5$ m

14| ¿Cuánto tiempo tardará en llegar al suelo un cuerpo que se deja caer libremente desde una altura de 50 m en la superficie de Marte.

Solución. t=5,2 segundos

15| El radio de Mercurio es 0,37 veces el radio de la Tierra y la masa de Mercurio es 0,056 veces la masa de la Tierra. Determina el valor de la aceleración de la gravedad en la superficie de Mercurio.

Solución. $g=4{,}01\ m/s^2$

16| A una determinada altura sobre la superficie de la Tierra, el peso de un cuerpo, de 500 g de masa, es 4,899 N. Calcula a qué altura está situado el cuerpo.

Solución. $h=1{,}04\cdot10^4$ m